数理解析研究所講究録
977巻 1997年 52-68

Bimodule X からつくられた C^*-環 $\mathcal{O}_X$ の単純性について

九大数理　綿谷安男
Watatani Yasuo

◻︎はじめに

これは Kajiwara－Pinzari－Watatani の共同研究([17])です。

Subfactor の研究の進展によって明らかになったように，作用素環の bimodule をその表現論としてみなし考察することは大変重要です。

ここでは，片山[2]とPimsner[4]によって独立に導入されたC*環のbimodule Xから生成されたC*環$\mathcal{O}_X$をXから生成されたFree objectとみなします。それ$\mathcal{O}_X$の単純性の判定条件でCuntz-Krieger algebra $\mathcal{O}_A$の時の条件(I)に相当するものを考え，特にsimple C*-algebraのinclusion $A \subset B$でそのindexが1でない場合に$X = {}_A B_A$とみて$\mathcal{O}_X$がsimpleになることを示します。

$\boxed{1}$ freeな生成

集合$X=\{a,b\}$上の自由群$F_X=F_2$に典型的に表われているように、freeに生成してできた数学的対象は基本的で重要なものになります。ここでfreeとはどういうことかと反省してみると、(Voiculescu流のすごい話とは違う意味なので悪しからず)、群の積構造を忘れるというforgetful functorのadjoint functorとしてfreeな生成ということが想定できます。

$\boxed{\text{例}}$ (自由群)

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \text{ の圏} \arrow[r, bend left, "\text{free group をつくる}"] & \mathbf{Group} \text{ の圏} \arrow[l, bend left, "\text{積を忘れる}"]
\end{tikzcd}
$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Group}}(\mathrm{Free}(X), G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, \mathrm{Forget}(G))$$

$\boxed{\text{例}}$ (Tensor algebra)

vector space V 上の Tensor algebra $T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Vector\ Space}/\mathbb{C} \text{ の圏} \arrow[r, bend left, "\text{Tensor alg. をつくる}"] & \mathbf{Algebra}/\mathbb{C} \text{ の圏} \arrow[l, bend left, "\text{積を忘れる}"]
\end{tikzcd}
$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(T(V), A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vector}}(V, \mathrm{Forget}(A))$$

以上のことをまとめて

$$
\begin{tikzcd}
\text{Hilbert } C^*\text{-bimodule の圏} \arrow[r, bend left, "\mathcal{O}_X \text{をつくる}"] & C^* \text{alg. の圏} \arrow[l, bend left, "\text{積を忘れる}"]
\end{tikzcd}
$$

が互いに adjoint functor になっているようなものとして Cuntz 型の環 $\mathcal{O}_X$ をとらえます。ここで注目することは C^*環の積の構造は忘れても bimodule や C^*環値内積の構造は忘れません。

$$
\text{☆}\begin{cases} a\cdot x\cdot b = axb \\ (x|y)_{右} = x^*y \\ {}_{左}(x|y) = xy^* \end{cases}
$$

それどころか $\mathcal{O}_X$ とはつまるところ bimodule 作用や C^*-値内積の与えられた X だけを手がかりにそれを operator の積の形で上の☆のようになるようにうまく C^*-環の積を「想い出す」普遍的な対象として定義されるのです。

$\boxed{2}$ $\mathcal{O}_X$ の普遍性による定義

Cuntz $\mathcal{O}_n$ とは n つの isometries $S_1, S_2, \cdots S_n$ で $S_1S_1^* + \cdots + S_nS_n^* = I$ をみたすものからつくられる普遍的な C^*-環でした。まずはこれをまねて $\mathcal{O}_X$ を生成元と交換関係でかき、その後で $\boxed{1}$ の意味で free な生成として $\mathcal{O}_X$ を定義し直そう。

$\boxed{\text{設定}}$ Aを(簡単のため)1をもつ C^*-algebra,

Xを右Hilbert A-moduleで finitely generated projective moduleになっているとする。つまり有限コの $u_1, \cdots, u_n \in X$ があって次をみたす。

$$\forall x \in X \quad x = \sum_{i=1}^{n} u_i (u_i | x)_A$$

ここで $\{u_1, \cdots, u_n\}$ を Xの basis と呼ぼう。

すると,この時 $\mathcal{L}_A(X_A)$ は "compacts" 全体 $K = K_A(X_A)$ と一致することに注意しておく。さて $\phi : A \to \mathcal{L}_A(X_A)$ という unital isometric *homo. を与えてこれにより X を A-A bimodule とみなす。この時 $a \in A$ に対し $a_{ij} = (u_i | \phi(a) u_j)_A$ とおくことで

$$(\#)\quad \phi(a)u_j = \sum_{i=1}^{n} u_i a_{ij}$$

とかけることに注意する。上の(#)から $\mathcal{O}_X$ の交換関係が自然につくれる。

$\boxed{\text{Def}}$ 上の設定の意味での A-A bimodule X に対し

C*-環 $\mathcal{O}_X$ とは A と n コの operator $\{S_1, \cdots, S_n\}$ から生成されて次の交換関係をみたす普遍的な C*-環と定義する；

$$\begin{cases} S_i^* S_j = (u_i | u_j)_A \\ \sum_{i=1}^{n} S_i S_i^* = I \\ a S_j = \sum_{i=1}^{n} S_i a_{ij} \qquad (a \in A) \end{cases}$$

注 この時 basis $\{u_1, \cdots, u_n\}$ が直交系であることと生成元 $S_1, \cdots, S_n$ が partial isometries であることは同値。

今 $x=\sum_{i=1}^{n} u_i a_i \in X$ $(a_i \in A)$ に対し，

$Sx=\sum_{i=1}^{n} S_i a_i$ とおくとこれは well-defined で

$S_x^* S_y = (x|y)_A$ と右 A 値内積が作用素の通常の積で実現されている。これでは左右のバランスをかいている。左側の内積はどうなっているのだろうか。bimodule のつくる tensor category では conjugate がある方が望ましいので，必然的に左右両方の C*値内積が入る方ハズですから。

実は θ_x は次に示すように $K=K_A(X_A)$ 値左内積を自然に作用素の積として実現しているのでそれがかくれているのである。それを露(あらわ)な形にしよう。

$X=X_A$ に自然に $\mathbb{K}=\mathbb{K}_A(X_A)$ 値内積を rank one operator $\theta_{x,y}\in\mathbb{K}$ を使って ${}_{\mathbb{K}}(x|y)=\theta_{x,y}$ で入れよう。すると $X={}_{\mathbb{K}}X_A$ は Rieffel の意味の imprimitive bimodule になる。

実はこの $X={}_{\mathbb{K}}X_A$ の左右の内積を operator の通常の積で実現するとともに A の X への bimodule としての作用も operator の通常の積で実現する普遍的な C^*-環は Toeplitz algebra $\mathcal{T}_X$ になっています。そこに $\phi(a)\in\mathbb{K}$ と $a\in A$ を同一視することまで要請したのが $\mathcal{O}_X$ です。

(例) $X={}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^2_{\mathbb{C}}$ に対し、Toeplitz alg $\mathcal{T}_X=C^*(T_x \mid x\in X)$ では $\pi_K(\phi(a))\neq\pi_A(a)$。特に $\pi_K(\phi(1))\neq I$ となる。

しかしこの時 $aT_x = T_{\phi(a)x}$ は成立している

のだから注意が必要。ここで

$$\pi_K(\phi(1)) \neq \pi_A(1) \iff T_1T_1^* + \cdots + T_nT_n^* \neq 1$$

とかけば見なれたものになるでしょう。

以上で $\pi_K(k)$ $(k \in K)$ や $\pi_A(a)$ $(a \in A)$

は $\mathcal{T}_X$ での実現された対象を表わしている。

$\boxed{\text{Def}}$ (bimodule X の構造を operator の積で表現する普遍的な C^*-環としての $\mathcal{O}_X$)

上での状況の A-A bimodule X に対し、C^*-環 $\mathcal{O}_X$ とは contraction $S : X \ni x \longmapsto S_x \in \mathcal{O}_X$, unital *homo $\pi_A : A \longrightarrow \mathcal{O}_X$, unital *homo $\pi_K : K \longrightarrow \mathcal{O}_X$ で次の関係をみたす普遍的なものからつくられた C^*-環 $C^*\{S_x \mid x \in X\}$ である:

$$\begin{cases} S_{k\cdot x} = \pi_K(k)\, S_x \\ S_{x\cdot a} = S_x\, \pi_A(a) \\ S_x^* S_y = \pi_A\left((x|y)_A\right) \\ S_x S_y^* = \pi_K\left({}_K(x|y)\right) \\ \pi_K(\phi(a)) = \pi_A(a) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x\in X \\ y\in X \\ a\in A \\ k\in K \end{array}$$

さて1つだけ $\mathcal{O}_X$ の具体的な構成([2],[4])をあげておく。$X^{\otimes m} = \underbrace{X\otimes_A \cdots \otimes_A X}_{m}$ とおき "Fock space" $F(X) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} X^{\otimes m}$ を考える。$x\in X$ に対する "creation operator" T_x を

$$T_x(x_1\otimes\cdots\otimes x_m) = x\otimes x_1\otimes\cdots\otimes x_m$$

できめる。$T_x \in \mathcal{L}_A(F(X)_A)$ の $K_A(F(X)_A)$ による quotient の像を S_x とすれば $\mathcal{O}_X = C^*[S_x \mid x\in X]$

$\boxed{2}$ $\mathcal{O}_X$の単純性

Cuntz環 $\mathcal{O}_n$ やCuntz-Krieger環 $\mathcal{O}_A$ の単純性や接合積 $A \rtimes \mathbb{Z}$ の単純性やDoplicher-Roberts algebra $\mathcal{O}_\rho$ の単純性や松本の $\mathcal{O}_\Lambda$ [3]の単純性を同じ枠組でかこうとして次の(I)-freeという条件を考える。余り格好はよくない。

$\boxed{\text{Lemma}}$ $T \in \mathcal{O}_X$ に対し $\sigma(T) = \sum_{i=1}^{n} S_i T S_i^*$ とおく。ここで $S_i = S_{u_i}$ のこと。すると $\sigma : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ はCP-mapで $A' \cap \mathcal{O}_X$ 上では isometric *endomorphism になる。σ は $A' \cap \mathcal{O}_X$ 上に制限すれば basis $\{u_1, \dots, u_n\}$ の選び方に依らずきまる。

$\{S_x \mid x \in X\}$ から代数的に生成される $*$-環を ${}^{\circ}\mathcal{O}_X$ とかく。$\{S_{x_1} \cdots S_{x_m} S_{y_m}^* \cdots S_{y_1}^* \mid x_i \in X, y_i \in X\}$

から生成される C^*-alg を $\mathcal{F}_m$ とおく

$\boxed{\text{Def}}$ bimodule X が (I)-free

$\overset{\Longleftrightarrow}{\text{def}}$ $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \exists T_k \in A' \cap {}^{\circ}\mathcal{O}_X$ (with $\|T_k\| = 1$)

satisfying

(1) $T_k^* T_k,\ T_k^* \sigma^k(T_k) \in \mathcal{F}_m$

(2) $A \ni a \longmapsto \phi(a) T_k^* T_k \in \mathcal{F}_m$ is completely isometric

(3) $\|T_k^* \sigma^k(T_k)\| < 1$

(注) Cuntz–Krieger 環や simple C^*-alg の inclusion $A \subset B$ からくる $\mathcal{O}_X$ の場合は もっと強く $T_k = q_k$ として projection がとれて, $a \longmapsto \phi(a) q_k$ は 1:1 の $*$-homo で $\forall 1 \leq r \leq k$ に対し $q_k \sigma^r(q_k) = 0$ とできる。

$\boxed{\text{Def}}$ Aのclosed ideal Jが <u>X−invariant</u> とは
$\forall a\in J$ $\forall x\in X$ $\forall y\in X$ に対し $(x|\phi(a)y)_A\in J$
となることとする。Cuntz−Krieger環の時の0−1
行列の既約性や $C(M)\rtimes_\alpha\mathbb{Z}$ の時のactionの
minimalityに相当するものとして X−simple という
条件を考えよう。Aのclosed ideal Jが <u>X−simple</u>
とは AのX−invariant idealが 0か Aに限る
ことをいう。

$\boxed{\text{Theorem 1}}$ Xが (I)−free で Aが faithful
に表現されていれば $\mathcal{O}_X$ は生成元のとり
方によらず交換関係だけから同型を除い
て一意的にきまる。

$\boxed{\text{Theorem 2}}$ Xが(I)-free かつ Aが X-simple

$\Longrightarrow$ $\mathcal{O}_X$ は simple.

$\boxed{\text{Theorem 3}}$ $1 \in A \subset B$ を C^*-alg の inclusion で

$E : B \to A$ を conditional expectation of finite index.

Aが X-simple (たとえば Aが simple) で

$\mathrm{Index}\, E \neq 1$ と仮定する。 $X = {}_A B_A$ とみる

$\Longrightarrow$ $\mathcal{O}_X$ は simple

Proof. Jones proj e_A を使って $g_n = e_A \otimes \cdots \otimes e_A \otimes (1 - e_A)$ とおけ

(注) これは $\mathcal{O}_n$ が $n \neq 1$ の時 simple で

$\mathcal{O}_1 \simeq C(\mathbb{T})$ となっている事実に対応している

(注) 一般に

$$\mathcal{O}_X \simeq \text{"} A \otimes_{\alpha} \mathcal{O}_{[B:A]} \text{"}$$

ひねったテンソル積

のようなものである。

References

[1] T. Kajiwara, C. Pinzari and Y. Watatani:
準備中

[2] Y. Katayama, Generalized Cuntz algebras $\mathcal{O}_N^n$, RIMS Kokyuroku 858 (1994) 131-151

[3] K. Matsumo, On C*-algebras associated with subshifts, to appear in Internat. J. Math.

[4] M. Pimsner, A class of C*-algebras generalizing both Cuntz-Krieger Algebras and crossed products by $\mathbb{Z}$, preprint.